

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (3 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -1 & \lambda + 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

a) (2 puntos) Determine el rango de esa matriz según los valores de λ .

b) (1 punto) Determine para qué valores de λ existe la inversa de esa matriz y determine la inversa, si existe, cuando $\lambda = -2$.

2. (2 puntos)

a) (1 punto) Determine la posición relativa de las rectas siguientes:

$$r : \begin{cases} -x - 2y + 12 = 0 \\ 3y - z - 15 = 0 \end{cases} \quad s : \frac{x - 2}{5} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z}{3}$$

b) (1 punto) Calcule la distancia entre esas rectas.

3. (5 puntos)

a) (1,5 puntos) Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$$

Determine los máximos relativos, los mínimos relativos y los puntos de inflexión, si existen, de la función $f(x)$.

b) (1,5 puntos) Usando el cambio de variable $t = \cos(x)$, calcule:

$$\int \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} dx$$

c) (2 puntos)

1) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, 2)$.

2) (1 punto) Calcule el área encerrada por la curva $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ y la parte positiva del eje OX .

OPCIÓN B

1. (3 puntos)

a) (1,5 puntos) Considere la matriz y los vectores siguientes:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde x , y y z son números reales.

Determine x , y y z para que el vector $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $\mathbf{M} \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

b) (1,5 puntos) Sean ahora la matriz y vectores siguientes:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde a , b y c son números reales que verifican que $a \neq 0$, $a + b = 0$, $c = a$.

Determine si el sistema $\mathbf{N} \mathbf{X} = \mathbf{B}$ es compatible determinado.

2. (2 puntos)

a) (1 punto) Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta paralela a la recta:

$$r : \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 1 \\ x + 3y - 2z = -4 \end{cases}$$

que pasa por el punto $(0, 2, -4)$.

b) (1 punto) Determine la distancia del punto $P = (1, 1, 0)$ a la recta r anterior.

3. (5 puntos)

a) (2 puntos) Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.

b) (1,5 puntos) Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}} dx$$

c) (1,5 puntos) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

Como norma general, se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

OPCIÓN A

A. 1. (3 puntos)

- a) (2 puntos)** La calificación debe tener en cuenta si se analizan todos los casos posibles y los razonamientos empleados.
- b) (1 punto)** Decir para qué valores existe la inversa: 0,25 puntos. Esta cuestión pretende ver si entienden la relación entre rango y existencia de inversa. Algunos estudiantes la han podido responder en el apartado previo de manera automática. En ese caso debe considerarse como respondida, aunque sea en el apartado anterior.

Determinación de la inversa: 0,75 puntos. La determinación de la matriz inversa puede hacerse por cualquier método. Si se realiza por el método de Gauss-Jordan, el proceso es más largo que si se calcula mediante determinantes y los errores numéricos pueden ser más habituales. En ese caso deberá valorarse más el proceso que los cálculos, siempre que éstos tengan sentido.

A. 2. (2 puntos)

- a) (1 punto)** Determinación de la posición: 1 punto.
- b) (1 punto)** Distancia: 1 punto.

A. 3. (5 puntos)

- a) (1,5 puntos)** Determinación de máximos: 0,5 puntos. Determinación de mínimos: 0,5 puntos. Determinación de puntos de inflexión: 0,5 puntos.
- b) (1,5 puntos)** Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si al final de la integral no se deshace el cambio, podrá penalizarse el problema hasta 0,25 puntos. Si no se incluye la constante de integración, podrá penalizarse el problema hasta 0,25 puntos.
- c) (2 puntos)**
 - 1) (1 punto)** Los cálculos son suficientemente simples como para que no haya dificultades en determinar los valores de a y b . Si no justifican que los valores encontrados pertenecen a un extremo (es decir, no corresponden a un punto de inflexión), la puntuación máxima será de 0,6 puntos.
 - 2) (1 punto)** Los cálculos son suficientemente simples como para que no haya dificultades en determinar el valor del área.

OPCIÓN B

B. 1. (3 puntos)

- a)** (1,5 puntos) Resolución del sistema: 1,5 puntos.
- b)** (1,5 puntos) Dado que en el enunciado se dice que $a \neq 0$, la respuesta es única y no ofrece dificultad. Determinación de que el sistema es compatible determinado: 1,5 puntos.

B. 2. (2 puntos)

- a)** (1 punto) Si no se proporciona la recta como intersección de dos planos la calificación máxima será de 0,5 puntos.
- b)** (1 punto) Cálculo de la distancia: 1 punto.

B. 3. (5 puntos)

- a)** (2 puntos) Planteamiento correcto del problema: 1 punto. Resolución: 0,75 puntos. Comprobación o razonamiento de que la solución encontrada corresponde a un mínimo: 0,25 puntos.
- b)** (1,5 puntos) Los pasos para el cálculo de la integral deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta. Si al final de la integral no se deshace el cambio, podrá penalizarse el problema hasta 0,25 puntos. Si no se incluye la constante de integración, podrá penalizarse el problema hasta 0,25 puntos.
- c)** (1,5 puntos) Los pasos para el cálculo del límite deben estar claros y la valoración del problema debe tenerlo en cuenta.